

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Manual de Ejercicios: Matemáticas Preuniversitarias

*Guía de preparación para la evaluación diagnóstica que se aplica a
estudiantes de primer ingreso de Ingenierías*

Primavera 2024

Departamento de Matemáticas y Física

www.iteso.mx

Tabla de contenido

1. Introducción.....	4
2. Temario	5
3. Lenguaje matemático	6
3.1 Algunos conceptos.....	6
3.2 ¡Quiero saber más!	7
3.3 Un ejemplo con solución.....	7
3.4 Ejercicios de práctica.....	7
4. Aritmética.....	9
4.1 Operaciones básicas.....	9
4.2 Potencias y raíces.....	9
4.3 Jerarquía de operaciones.....	10
4.4 ¡Quiero saber más!	10
4.5 Ejercicios de práctica.....	10
5. Álgebra	11
5.1 Operaciones con expresiones algebraicas	11
5.1.1 Ejemplo de resta	11
5.1.2 Ejemplo de multiplicación y de división.....	11
5.1.3 Ejemplos con potencias	11
5.1.4 Ejemplos con productos notables y factorización	12
5.2 Resolución de ecuaciones algebraicas.....	12
5.2.1 Ejemplo de ecuación de primer grado.....	12
5.2.2 Ejemplo de ecuación de segundo grado	12
5.2.3 Ejemplo de inecuación.....	13
5.2.4 Ejemplo de solución de un sistema de ecuaciones (por el Método de Sustitución)	13
5.3 ¡Quiero saber más!	13
5.4 Ejercicios de práctica.....	14
6. Trigonometría	15
6.1 Triángulo rectángulo y Teorema de Pitágoras.....	15
6.2 Razones trigonométricas	15
6.3 ¡Quiero saber más!	16
6.4 Ejercicios de práctica.....	16
7. Funciones	18
7.1 Tablas y gráficas	18



7.2 Funciones lineales	18
7.3 Otros tipos de funciones	19
7.4 ¡Quiero saber más!	19
7.5 Ejercicios de práctica.....	19
8. Logaritmos	21
8.1 Logaritmo natural y logaritmo base diez	21
8.2 Leyes de logaritmos	21
8.3 Ecuaciones logarítmicas	21
8.4 ¡Quiero saber más!	22
8.5 Ejercicios de práctica.....	22
9. Clave de respuestas	23
10. ¡Quiero saber más!	25

1. Introducción

Apreciable alumno:

Te damos la más cordial bienvenida a esta casa de estudios deseando que tengas una grata y satisfactoria experiencia educativa.

Para las personas que laboramos en el Departamento de Matemáticas y Física del ITESO es muy importante acompañarte en tu proceso académico de principio a fin. La responsabilidad que ejerces en tu aprendizaje es un factor que puede ayudarte a lograr mejores resultados en tus materias. Por ello, diseñamos este manual práctico de ejercicios matemáticos en espera de que te sirvan de guía para realizar tu evaluación diagnóstica.

La evaluación diagnóstica es un examen presencial de opción múltiple (sin penalización por respuestas incorrectas) que nos permite identificar *grosso modo* qué tan familiarizado estás con ciertos temas de matemáticas preuniversitarias, que son necesarios para lograr un aprovechamiento óptimo en tus cursos de cálculo diferencial, cálculo integral, ecuaciones diferenciales, etc.

Es obligatorio presentar la evaluación diagnóstica. Ten en cuenta que no se permite el uso de formulario ni calculadora durante el examen. Si tu calificación es inferior a 70% tendrás un acompañamiento más profundo a través del Taller de Matemáticas Preuniversitarias para que mejores las habilidades matemáticas indispensables para el estudio de una ingeniería.

En este manual encontrarás explicaciones concretas de temas selectos, ejercicios resueltos, problemas aplicados y algunos de práctica que podrás verificar contrastando tus resultados con los que se encuentran al final del manual.

Próximamente se te hará llegar información detallada acerca de la presentación de tu examen y del Taller de Matemáticas Preuniversitarias vía correo institucional.

Para dudas puedes contactar a Giselle Andrade giselle.andrade@iteso.mx o a Nancy Ulloa nancyulloa@iteso.mx

¡Mucho éxito!

2. Temario

Este manual se conforma de seis temas, cada una de los cuales cuenta con una lista de conceptos por repasar, explicaciones breves de cada tema, ejemplos resueltos paso a paso y ejercicios para practicar lo aprendido. Los temas de estudio son:

- Lenguaje matemático
- Aritmética
- Álgebra
- Trigonometría
- Funciones
- Logaritmos

3. Lenguaje matemático

En las matemáticas, es sustancial poder entender y expresar los conceptos matemáticos con el lenguaje verbal correcto. Por ello, es de gran utilidad conocer la notación de los símbolos, operadores y demás términos, así como sus significados. En esta sección te presentamos algunos de los conceptos básicos que es importante que conozcas.

3.1 Algunos conceptos

El conjunto de los números reales se clasifica por los subconjuntos que lo conforman, a saber, los números naturales, enteros, racionales e irracionales. Puedes visualizarlos en el siguiente esquemático:

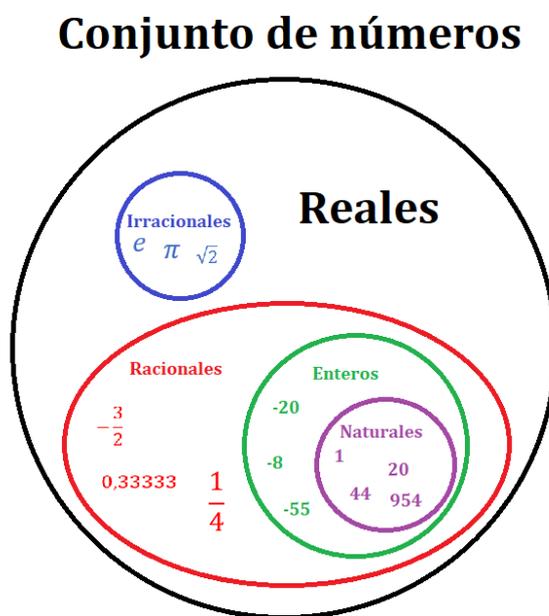


Figura tomada de: <https://ecuacionde.com/numeros-reales/>

Repasa cada uno de los subconjuntos de los reales representados en el esquemático: su definición, significado y qué números forman parte de ellos. Además, te compartimos una lista de conceptos que es importante que recuerdes cuando estés expresando ideas matemáticas en palabras. Conviene que definas, identifiques y comprendas el significado de cada uno de estos conceptos:

<ul style="list-style-type: none"> -Propiedades de: cerradura, conmutatividad, asociatividad y distributividad -Simbología de “mayor que”, “menor que”, “mayor o igual a”, “menor o igual a”, “desigual a” -Múltiplos 	<ul style="list-style-type: none"> -Divisores -Factores -Recíproco -Números complejos -Complejo conjugado -Números primos -Ecuación 	<ul style="list-style-type: none"> -Ecuación lineal (o de grado 1) -Ecuación cuadrática (o de grado 2) -Ecuación cúbica (o de grado 3) -Ecuación polinómica de grado “n” -Polinomio de grado “n” -Función -Función inversa
--	--	---

3.2 ¡Quiero saber más!

Clasificación de los números reales y sus propiedades: <https://ecuacionde.com/numeros-reales/>

Recíproco: <https://www.disfrutalasmaticas.com/numeros/reciproco.html>

Ecuaciones polinómicas: <https://www.lifeder.com/ecuaciones-polinomicas/>

Números reales: <https://www.liveworksheets.com/w/es/matematicas/326353>

Múltiplos y divisores: <https://es.khanacademy.org/math/6-grado-innova-schools/x4950ce693411a6d9:nocion-y-uso-de-los-numeros>

Operaciones con cero e infinito: <http://unaayudamatematicasucre.blogspot.com/2016/08/operaciones-con-cero-e-infinito.html>

3.3 Un ejemplo con solución

Este es el nombre que se le da a: $5x(x - 1) = 2$

Respuesta: Ecuación cuadrática (o ecuación de grado 2)

Explicación: Si simplificamos, obtenemos

$$5x^2 - 5x = 2$$

$$5x^2 - 5x - 2 = 0$$

Lo cual guarda la forma general de una **ecuación polinómica de segundo grado**, o bien ecuación cuadrática, o bien ecuación de grado 2, de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde

$$a = 5; b = -5; c = -2$$

3.4 Ejercicios de práctica

3.4.1 Clasifica los siguientes números según el subconjunto de los reales más específico al que pertenecen:

a) $0.\bar{7}$	_____	d) 0	_____	g) $6/0$	_____
b) 0.7	_____	e) -1.4	_____	h) π	_____
c) 395	_____	f) $\frac{1}{2}$	_____	i) -15	_____
				j) $\sqrt{5}$	_____

3.4.2 Considera el número 48 para contestar los siguientes incisos:

- 48 se puede descomponer en 6 y 8, los cuales se llaman sus _____.
- 96 es un _____ de 48.
- 2 y 3 son los factores _____ de 48.
- 12 es un _____ de 48.

3.4.3 El discriminante $D = b^2 - 4ac$ se obtiene de una parte de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas escritas en la forma: $ax^2 + bx + c = 0$. Considera que a, b, c son números racionales y que $a \neq 0$ para responder lo siguiente:



- a) Si $D=4$, entonces obtendremos dos soluciones _____ de la ecuación cuadrática
- b) Si $D=-4$, entonces obtendremos dos soluciones _____ de la ecuación cuadrática
- c) Si $D=0$, entonces obtendremos dos soluciones _____ de la ecuación cuadrática
- d) Si $D=5$, entonces obtendremos dos soluciones _____ de la ecuación cuadrática

3.4.4 Clasifica las siguientes ecuaciones o expresiones matemáticas:

- a) $5x - 3 = 3$ es un(a) _____ de primer grado.
- b) $2x(2x + 1) - 9$ es una expresión de _____ grado.
- c) $(2x - 3)(2x + 3) = 0$ es una ecuación _____.
- d) $3x^3 + 2x - 9$ es un(a) _____ de tercer grado.

3.4.5 ¿Cuál de las propiedades de los reales (de Cerradura, Conmutatividad, Asociatividad o Distributividad) se aplicó en cada inciso? Considera que x es un número real.

- a) $10x - 15 = 5(2x - 3)$ _____
- b) Como 10 y $\sqrt{2}$ son números reales, luego $10 + \sqrt{2}$ y $10\sqrt{2}$ también lo son. _____
- c) $5 + x = x + 5$ _____
- d) $3(2x) = (3 \cdot 2)x$ _____

3.4.6 Considera que $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$ para determinar si el resultado de cada expresión resultará negativo, positivo, o no se puede determinar el signo.

- a) $(a + b)c$ _____
- b) $a(b + c)$ _____
- c) $-abc$ _____
- d) $-a + b/c$ _____

3.4.7 Determina el símbolo ($<$, $>$, $=$, \leq ó \geq) que se debe colocar en cada espacio para que las expresiones sean verdaderas.

- a) 4 ___ -4
- b) $5/2$ ___ e
- c) $\sqrt{2}$ ___ 1
- d) $\sqrt{2}/2$ ___ $1/\sqrt{2}$

3.4.8 Considera que m y n son números reales diferentes de cero, y que x es una variable real. Escribe cómo representar lo siguiente matemáticamente:

- a) Función de x
- b) El recíproco de m
- c) Función inversa de $f(x)$
- d) El complejo conjugado de $m + ni$, donde $i = \sqrt{-1}$

3.4.9 Determina los resultados sin el uso de calculadora. **Extra:** Investiga por qué resultan así.

- a) $3/0 =$
- b) $0/3 =$
- c) $0/0 =$
- d) $3^0 =$
- e) $0^3 =$
- f) $0^0 =$

4. Aritmética

Desde del conjunto de los números reales es posible contar, realizar cálculos y medir para llegar a soluciones numéricas mediante las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. En esta sección podrás repasar estas operaciones básicas de la aritmética, revisar ejemplos resueltos y realizar ejercicios de práctica.

Aquí hay una lista de conceptos que vale la pena que definas, identifiques y comprendas:

-Términos	-Operador	-Raíz
-Expresión aritmética	-Operando	-Leyes de los signos
-Factor	-Numerador	-Leyes de exponentes
-Divisor	-Denominador	-Jerarquía de operaciones
-Recta numérica	-Potencia	

4.1 Operaciones básicas

Las cuatro operaciones básicas de la aritmética son: suma, resta, multiplicación y división.

Observa los siguientes ejemplos de suma y resta de números Enteros:

$$\text{a) } 9 + 6 = \mathbf{15}$$

$$\text{b) } 2 - 6 = \mathbf{-4}$$

$$\text{c) } 4 + (-1) = 4 - 1 = \mathbf{3}$$

$$\text{d) } -7 - (+3) = -7 - 3 = \mathbf{-10}$$

$$\text{e) } 18 - (-4) = 18 + 4 = \mathbf{22}$$

También se pueden realizar operaciones de suma y resta con fracciones, y reducirlas en otras equivalentes, como se muestra aquí:

$$\text{a) } \frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{8+15+10}{20} = \frac{33}{20} = 1 \frac{13}{20}$$

$$\text{b) } \frac{7}{8} - \frac{5}{6} = \frac{42-40}{48} = \frac{2}{48} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 24} = \frac{2}{2 \cdot 24} = 1 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$$

$$\text{c) } \frac{4}{-32} = \frac{+4}{-32} = -\frac{4}{32} = -\frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 8} = -\frac{4}{4 \cdot 8} = -1 \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} = \mathbf{-0.125}$$

A continuación, puedes ver un ejemplo de multiplicación y uno de división de fracciones:

$$\text{a) } \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{10 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{5}{5} \cdot \frac{3}{2 \cdot 7} = 1 \cdot \frac{3}{14} = \frac{3}{14}$$

$$\text{b) } \frac{\frac{4}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{3} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

4.2 Potencias y raíces

Las operaciones de potencia y raíz se desprenden a partir de las cuatro operaciones previas. Para trabajar con ellas es indispensable conocer y manejar las **leyes de los exponentes**. He aquí un ejemplo de la simplificación de una expresión que contiene potencias y raíces:

$$\sqrt[4]{625} + \frac{7^3}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}} = \sqrt[4]{5^4} + \frac{343}{(4)^2} = 5 + \frac{343}{16} = \frac{80}{16} + \frac{343}{16} = \frac{423}{16} = 26 \frac{7}{16}$$

4.3 Jerarquía de operaciones

Con la jerarquía de operaciones se establece el orden en el que se deben realizar las operaciones aritméticas.

Orden de Jerarquía	Operación o agrupación	Símbolos/Ejemplos
Primero	Símbolos de agrupación como paréntesis , corchetes o llaves	$()$, $[\]$, $\{ \}$
Segundo	Potencias y raíces	2^3 , $4^{1/2}$, 3^{-2} , $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$
Tercero	Multiplicaciones y divisiones	$4 \cdot 3$, $2(3)$, $-1(3)$, $\frac{4}{5}$, $2 \div 3$, $5 / 3$
Cuarto	Sumas y restas	$3+5$, $3-8$

Observa el siguiente ejemplo en donde se aplica la jerarquía de operaciones:

$$\begin{array}{l}
 4\left\{-3 + \left[\frac{1}{2} \cdot 30\right] \div 5 - (7 - 3^2)\right\} = \\
 4\{-3 + [15] \div 5 - (7 - 9)\} =
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 4\{-3 + 3 - (-2)\} = \\
 4\{0 + 2\} = \\
 4\{2\} = \mathbf{8}
 \end{array}$$

4.4 ¡Quiero saber más!

Te invitamos a visitar estos sitios para aprender más acerca de estos temas.

<https://es.khanacademy.org/kmap/operations-and-algebraic-thinking-g/oat220-arithmetic-operations>

<https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/aritmetica/>

https://www.tutorela.es/matematicas/el_orden_de_las_operaciones

4.5 Ejercicios de práctica

4.5.1 Desarrolla las siguientes operaciones y simplifica los resultados a su mínima expresión, sin el uso de calculadora:

a) $(56) - (-41) =$

b) $-23 + (-19) =$

c) $(81) \cdot \left(\frac{-1}{-3}\right) =$

d) $\frac{-32}{\frac{-2}{5}} =$

e) $(5)(0) =$

f) $\frac{17}{\frac{0}{4}} =$

g) $\frac{8}{3} + \frac{9}{4} =$

h) $\frac{4}{7} - \frac{3}{5} + \frac{2}{3} =$

i) $\left(\frac{11}{4}\right) \cdot \left(\frac{10}{5}\right) =$

j) $\frac{-3}{\frac{-13}{6}} =$

k) $\frac{27}{18} - \frac{26}{39} =$

l) $\frac{4+5}{100-19} =$

m) $(6^2) - (2 + 4^2) + (7 - 3)^2 =$

n) $(4) \cdot (3^4) \cdot (2^{-5}) =$

o) $(4)^{-1/2} \cdot (125)^{1/3} =$

p) $\frac{3^6}{3^4} - \frac{9^{1/2}}{4^{-1/2}} =$

q) $\sqrt[4]{81} + \frac{1}{\sqrt[3]{-216}} =$

r) $3^9 \cdot 3^6 =$

s) $7^2 \cdot 3^2 =$

t) $\sqrt[4]{36^2} \cdot \sqrt{144} =$

u) $\sqrt[3]{56} + 9\sqrt[3]{7} =$

5. Álgebra

Es posible realizar operaciones con valores desconocidos, por lo que la incorporación de letras llamadas “variables” en las expresiones matemáticas sirve para representar esos valores. Con esta inclusión, las nuevas expresiones ya no son aritméticas, sino algebraicas. Presentamos algunos ejemplos de operaciones con expresiones algebraicas en la sección 5.1, así como de resolución de ecuaciones algebraicas en la sección 5.2.

Aquí hay una lista de conceptos que vale la pena que definas, identifiques y comprendas:

-Jerarquía de operaciones -Leyes de signos -Solución de ecuaciones -Ecuaciones de primer grado -Ecuaciones de segundo grado	-Factorización -Racionalización -Despeje -Inecuaciones -Sistemas de ecuaciones	-Productos notables -Cocientes notables -Trinomio cuadrado perfecto -Factor común
---	--	--

5.1 Operaciones con expresiones algebraicas

5.1.1 Ejemplo de resta

$$\begin{aligned}
 (4x + 2y - 3z) - (7x - 5y + 4z) &= \\
 4x + 2y - 3z - 7x + 5y - 4z &= \\
 4x - 7x + 2y + 5y - 3z - 4z &= \\
 -3x + 7y - 7z &
 \end{aligned}$$

5.1.2 Ejemplo de multiplicación y de división

Multiplicación:	División:
 $(3m - 5n)(8m + 7n) =$ $24m^2 + 21mn - 40mn - 35n^2 =$ $24m^2 - 19mn - 35n^2$	$\frac{15a^4b^2c + 42ab^6c^{-3} - 3a^3b^3c^6}{3ab^{-3}c^2} =$ $\frac{15a^4b^2c}{3ab^{-3}c^2} + \frac{42ab^6c^{-3}}{3ab^{-3}c^2} - \frac{3a^3b^3c^6}{3ab^{-3}c^2} =$ $5a^3b^5c^{-1} + 14b^9c^{-5} - a^2b^6c^4 =$ $\frac{5a^3b^5}{c} + \frac{14b^9}{c^5} - a^2b^6c^4$

5.1.3 Ejemplos con potencias

a) $\left(\frac{2x^3y^2}{3z^5}\right)^4 =$

$$\frac{2^4x^{3 \cdot 4}y^{2 \cdot 4}}{3^4z^{5 \cdot 4}} =$$

$$\frac{16x^{12}y^8}{81z^{20}}$$

b) $(-8m^6n^{15})^{\frac{2}{3}} = (-8)^{\frac{2}{3}}m^{\frac{2}{3} \cdot 6}n^{15 \cdot \frac{2}{3}} =$

$$\sqrt[3]{(-8)^2}m^{2 \cdot 3}n^{5 \cdot 3} = \sqrt[3]{64}m^{2 \cdot 2}n^{5 \cdot 2} =$$

$$\sqrt[3]{4^3}m^{2 \cdot 2}n^{5 \cdot 2} =$$

$$4m^4n^{10}$$



5.1.4 Ejemplos con productos notables y factorización

Producto notable:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}x^7 - 4y^{-3}\right)^3 = \\ & \left(\frac{1}{2}x^7\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}x^7\right)^2(4y^{-3}) + 3\left(\frac{1}{2}x^7\right)(4y^{-3})^2 - (4y^{-3})^3 = \\ & \frac{1}{8}x^{21} - 3x^{14}y^{-3} + 24x^7y^{-6} - 64y^{-9} \end{aligned}$$

Factorización:

$$\begin{aligned} 625a^8 - 81b^{-12} &= 25^2a^{4 \cdot 2} - 9^2b^{-6 \cdot 2} = \\ (25a^4)^2 - (9b^{-6})^2 &= (25a^4 + 9b^{-6})(25a^4 - 9b^{-6}) = \\ (25a^4 + 9b^{-6})(5^2a^{2 \cdot 2} - 3^2b^{-3 \cdot 2}) &= (25a^4 + 9b^{-6})((5a^2)^2 - (3b^{-3})^2) = \\ (25a^4 + 9b^{-6})(5a^2 + 3b^{-3})(5a^2 - 3b^{-3}) & \end{aligned}$$

5.2 Resolución de ecuaciones algebraicas

5.2.1 Ejemplo de ecuación de primer grado

$$4(2y + 5) = 3(5y - 2)$$

$$8y + 20 = 15y - 6$$

$$8y - 15y = -6 - 20$$

$$\begin{aligned} -7y &= -26 \\ y &= \frac{-26}{-7} \\ y &= \frac{26}{7} = 3\frac{5}{7} \end{aligned}$$

5.2.2 Ejemplo de ecuación de segundo grado

$$x(3x + 10) = 77$$

$$3x^2 + 10x - 77 = 0$$

$$a = 3 \quad b = 10 \quad c = -77$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(3)(-77)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 924}}{6}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{1024}}{6}$$

$$x = \frac{-10 \pm 32}{6}$$

$$x_1 = \frac{-10 - 32}{6} = \frac{-42}{6} = -7$$

$$x_2 = \frac{-10 + 32}{6} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$$

5.2.3 Ejemplo de inecuación

$$3 - 5x < 11$$

$$-5x < 11 - 3$$

$$-5x < 8$$

$$x > -\frac{8}{5} \text{ (en notación de desigualdad)}$$

Los valores de x que satisfacen la inecuación, en notación de intervalo, son:

$$x \in \left(-\frac{8}{5}, \infty\right)$$

5.2.4 Ejemplo de solución de un sistema de ecuaciones (por el Método de Sustitución)

$$\begin{cases} 2x + 8y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

Se despeja y de la primera ecuación

$$8y = 7 - 2x$$

$$y = \frac{7 - 2x}{8}$$

Se sustituye en la segunda ecuación

$$3x - 5\left(\frac{7 - 2x}{8}\right) = 4$$

Se resuelve la ecuación lineal

$$3x - \frac{35}{8} + \frac{5}{4}x = 4$$

$$3x + \frac{5}{4}x = 4 + \frac{35}{8}$$

$$\frac{17}{4}x = \frac{67}{8}$$

$$x = \frac{67(4)}{8(17)}$$

$$x = \frac{67}{34}$$

Se sustituye el resultado en la primera ecuación despejada

$$y = \frac{7 - 2\left(\frac{67}{34}\right)}{8}$$

$$y = \frac{7 - \frac{67}{17}}{8}$$

$$y = \frac{\frac{52}{17}}{8}$$

$$y = \frac{52}{136}$$

$$y = \frac{13}{34}$$

El resultado es: $x = \frac{67}{34}$ $y = \frac{13}{34}$

O bien, las coordenadas del punto en el que se intersecan las dos rectas es: $P\left(\frac{67}{34}, \frac{13}{34}\right)$

5.3 ¡Quiero saber más!

Te invitamos a visitar estos sitios para aprender más acerca de estos temas.

<https://blogs.ugto.mx/rea/clase-digital-4-operaciones-algebraicas-basicas-suma-resta-multiplicacion-y-division/>

http://cidecame.uaeh.edu.mx/lcc/mapa/PROYECTO/libro1/15_operaciones_algebraicas.html

https://recursos.salonesvirtuales.com/assets/bloques/productos-notables-factorizacion_tchefionsecalfaro.pdf

https://www.matematicasonline.es/almacen/2eso/fichas%20eso_sant/pdf_6-Ecuaciones1y2grado.pdf

<https://www.ck12.org/book/ck-12-conceptos-de-%c3%81lgebra-i-nivel-superior-en-espa%c3%b1ol/section/5.1/>

5.4 Ejercicios de práctica

5.4.1 Realiza las siguientes operaciones y simplifica los resultados a su mínima expresión, sin el uso de calculadora:

a) $(12x^4 + 5x - 9x^3 - x^2 + 23) - (7x^3 + 2x^4 - 8x^2 + 3x - 1) + (11x - 4x^2 - 9x^3 - 17) =$

b) $(3mn^2 + 10m^3n - 4m^4) + (9m^3n - n^3 + 8mn^2) =$

c) $(2x - 7)\left(x^2 + \frac{1}{3}x + 14\right) =$

d) $\frac{2x^3 - 2 - 4x}{2x + 2} =$

5.4.2 Desarrolla los productos notables:

a) $(x - 6)^2 =$ b) $(13a + 3b^4)^3 =$ c) $(p + 2)(p - 5) =$ d) $\left(8w + \frac{2}{5}z\right)\left(8w - \frac{2}{5}z\right) =$

5.4.3 Factoriza al máximo las expresiones siguientes:

a) $25x^7 - 10x^5 + 15x^3 - 5x^2 =$ c) $36 + m^4 + 12m^2 =$ e) $a^2 - 8a + 15 =$

b) $4am^3 - 12amn - m^2 + 3n =$ d) $256w^6 - 169z^{10} =$ f) $12x^2 - x - 6 =$

5.4.4 Resuelve las ecuaciones:

a) $x + 3(x - 1) = 6 - 4(2x + 3)$

c) $8x^2 - 2x - 3 = 0$

b) $\frac{5x+8}{3x+4} = \frac{5x+2}{3x-4}$

d) $x^2 - (7x + 6) = x + 59$

5.4.5 Determina los valores de x que satisfacen cada inecuación, y expresa el resultado en notación de intervalo:

a) $x - 6 > 21 - 8x$

b) $x - 3 < 5 > 17 - 2x$

5.4.6 Soluciona cada uno de los sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 4y + 3x = 8 \\ 8x - 9y = -77 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 11x - 9y = 2 \\ 13x - 15y = -2 \end{cases}$

6. Trigonometría

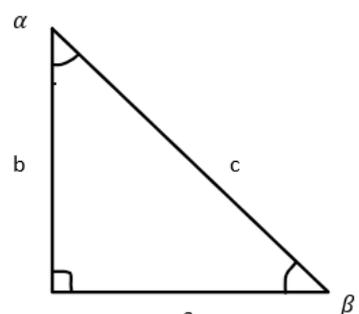
La trigonometría es el estudio de los triángulos, los ángulos, los lados y las relaciones proporcionales que guardan entre ellos. Su campo de aplicación en ingenierías es amplio, ya que con ella se pueden resolver problemas de cálculo, modelado matemático, ecuaciones diferenciales, etc.

Aquí hay una lista de conceptos que vale la pena que definas, identifiques y comprendas:

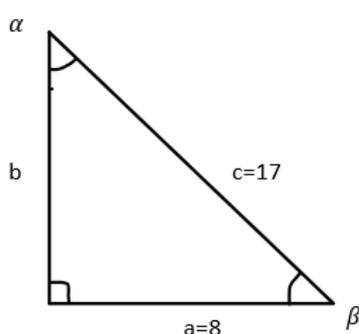
-Ángulo -Ángulo recto -Ángulo agudo -Ángulo obtuso	-Ángulo llano -Ángulos complementarios -Ángulos suplementarios -Ángulos coterminales	-Grados -Radianes -Triángulo rectángulo -Triángulo oblicuángulo	-Razones trigonométricas -Funciones trigonométricas inversas -Teorema de Pitágoras
---	---	--	--

6.1 Triángulo rectángulo y Teorema de Pitágoras

El triángulo rectángulo tiene un ángulo recto, por lo cual se sigue que la suma de los otros dos ángulos es de 90° (o bien $\frac{\pi}{2}$ radianes).

	<p>El teorema de Pitágoras se aplica a los triángulos rectángulos y relaciona los catetos a, b con la hipotenusa c como sigue:</p> $c^2 = a^2 + b^2$
--	---

Lo anterior se puede observar en el siguiente ejemplo:



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

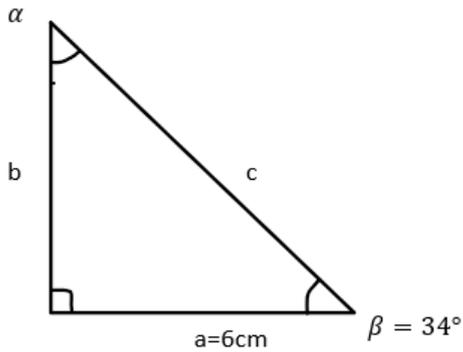
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{17^2 - 8^2}$$

$$b = 15$$

6.2 Razones trigonométricas

En el siguiente ejemplo hay varios caminos para encontrar los datos faltantes: una posibilidad es usando primero la razón de tangente del ángulo, luego la suma interna de ángulos y, finalmente, el Teorema de Pitágoras.



$$\tan(34^\circ) = \frac{6}{b}$$

$$b = \frac{6}{\tan 34^\circ} \approx 8.8954\text{cm}$$

$$\alpha = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{6^2 + \left(\frac{6}{\tan 34^\circ}\right)^2} \approx 10.7297\text{cm}$$

6.3 ¡Quiero saber más!

Te invitamos a visitar estos sitios para aprender más acerca de estos temas.

<https://miprofe.com/trigonometria-conceptos-basicos/>

<https://concepto.de/trigonometria/>

<https://www.studysmarter.es/resumenes/matematicas/geometria/trigonometria/>

<http://www.unl.edu.ar/ingreso/cursos/matematica/eje4/>

6.4 Ejercicios de práctica

6.4.1 Convierte de grados a radianes:

a) $37^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \text{ rad}$

b) $81^\circ 5' 37'' = \underline{\hspace{2cm}} \text{ rad}$

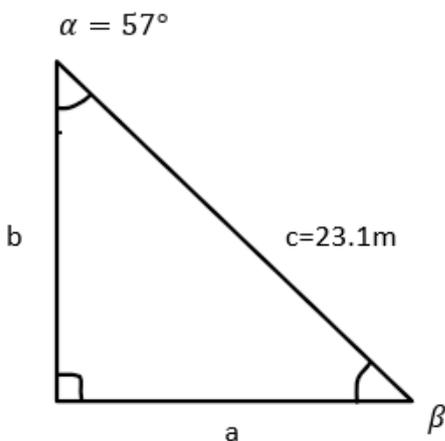
6.4.2 Convierte de radianes a grados:

a) $\frac{7}{12}\pi = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$

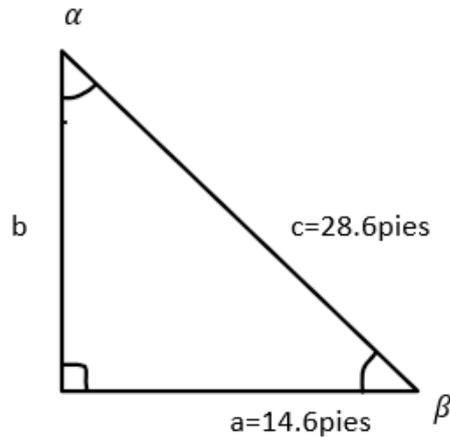
b) $\frac{5}{6}\pi = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$

6.4.3 Calcula los datos faltantes de cada triángulo rectángulo:

a)



b)





6.4.4 Completa las siguientes razones trigonométricas sin el uso de calculadora:

a) Si $\cos\theta = \frac{3}{5}$ entonces $\sec\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ e) Si $\sin\theta = \frac{4}{5}$ entonces $\cot\theta = \underline{\hspace{2cm}}$

b) Si $\cot\theta = \frac{5}{12}$ entonces $\tan\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ f) $\csc\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$

c) Si $\sec\theta = \frac{13}{12}$ entonces $\tan\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ g) $\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$

d) Si $\csc\theta = \frac{5}{3}$ entonces $\sin\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ h) $\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$

6.4.5 Resuelve el siguiente problema con el uso de trigonometría:

Un servicio de mudanza coloca una tabla que se usará como rampa para descargar muebles. La tabla mide 3.5m. Debido a lo delicado de los muebles que manipulan es riesgoso usar un ángulo de elevación mayor a 56° . ¿Cuál es la altura máxima (en metros) a la que se debe recargar la rampa?

7. Funciones

En cualquier fenómeno existen características que cambian y que llamaremos variables. Si consideramos que una de esas variables modifica su comportamiento debido a los cambios que presenta otra variable, podemos decir que existe una dependencia o relación entre ellas.

Si bien hay muchas estructuras matemáticas para vincular dos o más variables, nos enfocaremos únicamente en aquellas que incluyen exactamente dos variables, siendo una dependiente de la otra.

Aquí hay una lista de conceptos que vale la pena que definas, identifiques y comprendas:

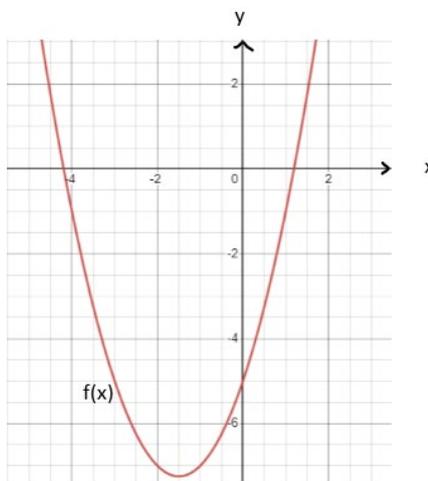
-Variable dependiente	-Función lineal	-Función trigonométrica
-Variable independiente	-Función cuadrática	-Función exponencial
-Continuidad	-Función polinómica	-Función logarítmica
-Dominio de una función	-Función inversa	-Funciones a trozos (o por tramos)
-Rango o Imagen de una función	-Función racional	-Tabla y gráfica de una función

7.1 Tablas y gráficas

Las tablas son representaciones numéricas de las funciones. Las gráficas, a su vez, son representaciones cartesianas de las mismas. Observa el ejemplo de una función cuadrática, en donde se plasman tres de sus representaciones: la algebraica, la tabular y la gráfica:

$$f(x) = x^2 + 3x - 5$$

x	$f(x)$
-3	-5
-2	-7
-1	-7
0	-5
1	-1



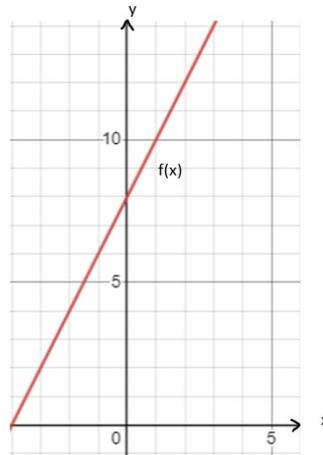
Nota que hay valores en $f(x)$ que se repiten para distintos valores de x . Sin embargo, esto no es posible en sentido contrario, esto es, no pueden existir dos o más valores de $f(x)$ para un mismo valor de x , pues esta relación dejaría de considerarse como función.

7.2 Funciones lineales

Las funciones lineales involucran el concepto de pendiente, el cual está estrechamente ligado al concepto de derivada. En el siguiente ejemplo, podrás observar tres representaciones de una función lineal: la algebraica, la tabular y la gráfica.

$$f(x) = 2x + 8$$

x	f(x)
-1	6
0	8
1	10



En esta gráfica es fácil observar que la función se puede representar con una línea recta cuyo comportamiento es creciente, lo cual implica que su pendiente es positiva.

7.3 Otros tipos de funciones

Existen muchos tipos de funciones, por ejemplo: polinomiales de grado n , trigonométricas, trigonométricas inversas, exponenciales, logarítmicas, a trozos (o por tramos), hiperbólicas, etc.

Revisa este enlace si quieres conocer acerca de algunos otros tipos de funciones:

<https://datascientest.com/es/comprender-funciones-matematicas>

7.4 ¡Quiero saber más!

Te invitamos a visitar estos sitios para aprender más acerca de estos temas.

<https://www.funciones.xyz/>

<https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/funciones/funciones.html>

7.5 Ejercicios de práctica

7.5.1 Determina lo que se solicita, dada la función $f(x) = -2x + 9$

a) El dominio de $f(x)$

b) La imagen (o el rango) de $f(x)$

c) La gráfica de $f(x)$

d) Clasifica la función (lineal, cuadrática, exponencial, a trozos, etc.)

e) Completa los valores faltantes en la tabla:

x	f(x)
-2	
0	
	1

7.5.2 Determina lo que se solicita, dada la función $f(x) = x^2 + 4x - 45$

a) El dominio de $f(x)$

b) La imagen (o el rango) de $f(x)$

c) La gráfica de $f(x)$

d) Clasifica la función (lineal, cuadrática, exponencial, a trozos, etc.)

e) Completa los valores faltantes en la tabla:

X	f(x)
-9	
0	
5	

7.5.3 Para cada representación tabular, indica si los datos corresponden o no a una función $y = f(x)$. Si lo hacen, determina si esa función es lineal, cuadrática, o ninguna de las dos:

a)

X	Y
-2	14
-1	11
0	8
1	5
2	2

b)

x	f(x)
-2	-15
1	-8
0	-3
1	0
2	1

7.5.4 Evalúa las siguientes funciones:

a) $f(x) = 7x - 3$

Dominio:

$f(0) =$

$f(4) =$

$f(m + 1) =$

$f(-x^3) =$

b) $f(x) = \frac{x+8}{x^2-x+5}$

Dominio:

$f(-1) =$

$f(10) =$

$f\left(\frac{p}{2}\right) =$

$f(x^2) =$

c) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Dominio:

$f(-1) =$

$f(0) =$

$f(1) =$

$f(2) =$

8. Logaritmos

Con el logaritmo, es posible reestructurar los elementos que conforman una expresión exponencial. Así, en notación algebraica tenemos que:

$$y = a^x \quad \text{si y sólo si} \quad \log_a y = x$$

Aquí hay una lista de conceptos que vale la pena que definas, identifiques y comprendas:

-Leyes de logaritmos	-Cambio de base	-Base	-Exponente
-Restricciones de los logaritmos	-Leyes de exponentes	-Argumento	-Potencia

8.1 Logaritmo natural y logaritmo base diez

Existen logaritmos de diferentes bases; los más comunes son el logaritmo natural (o de base e) y el logaritmo de base 10.

$$y = e^x \quad \text{si y sólo si} \quad \ln y = x$$

$$y = 10^x \quad \text{si y sólo si} \quad \log y = x$$

8.2 Leyes de logaritmos

Los logaritmos se rigen por ciertas leyes. He aquí algunas de las más comunes:

$$\begin{aligned} \log_a(x) + \log_a(y) &= \log_a(x \cdot y) & \log_a x - \log_a y &= \log_a\left(\frac{x}{y}\right) & \log_a(x)^n &= n \cdot \log_a(x) \\ \log_a(a)^x &= x & a^{\log_a(x)} &= x & \log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \end{aligned}$$

8.3 Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación logarítmica en ocasiones se puede resolver despejando, pero en otras es necesario usar las propiedades de los logaritmos para lograr una estructura tal que nos permita hacer dicho despeje.

Observa el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{l|l|l} \log(5x + 1) = 2 + \log(2x - 3) & & 5x - 200x = -300 - 1 \\ \log(5x + 1) - \log(2x - 3) = 2 & \left| \begin{array}{l} \frac{5x + 1}{2x - 3} = 10^2 \\ 5x + 1 = 100(2x - 3) \\ 5x + 1 = 200x - 300 \end{array} \right. & -195x = -301 \\ & & x = \frac{-301}{-195} = \frac{301}{195} = 1 \frac{106}{195} \end{array}$$

8.4 ¡Quiero saber más!

Te invitamos a visitar estos sitios para aprender más acerca de estos temas.

<https://es.khanacademy.org/math/algebra2/x2ec2f6f830c9fb89:logs/x2ec2f6f830c9fb89:log-intro/a/intro-to-logarithms>

[¿Para qué sirven LOS LOGARITMOS? ¿jPor qué nos los explican en la escuela!?](#)

<https://www.portaleducativo.net/segundo-medio/35/logaritmos-propiedades>

8.5 Ejercicios de práctica

8.5.1 *Determina el valor de x en formato logarítmico:*

a) $e^{3x} = 14$

b) $7^{\frac{1}{2}x} = 2.9$

8.5.2 *Determina el valor de x en formato exponencial:*

a) $\log(x + 5) = 1.3$

b) $\ln(x^2) = 5.92$

8.5.3 *Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:*

a) $3^{x^2} = 7$

b) $\ln(e^x)^2 = 16$

c) $\log(x^2 + 4) - \log(x + 2) = 2 + \log(x - 2)$

9. Clave de respuestas

A continuación, encontrarás las respuestas a los ejercicios de práctica.

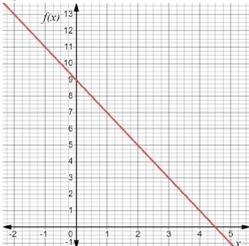
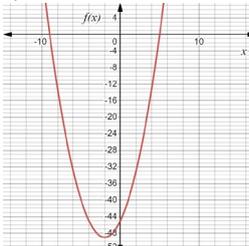
Sección 3: Lenguaje verbal a matemático		
<p>3.4.1</p> <p>a) Racional b) Racional c) Natural d) Entero e) Racional f) Racional g) Indeterminado: no existe como número real h) Irracional i) Entero j) Irracional</p> <p>3.4.2</p> <p>a) Factores b) Múltiplo c) Primos d) Divisor</p>	<p>3.4.3</p> <p>a) Distintas y racionales b) Distintas y complejas c) Repetidas y reales d) Distintas e irracionales</p> <p>3.4.4</p> <p>a) Ecuación b) Segundo c) Cuadrática (o de segundo grado) d) Polinomio</p> <p>3.4.5</p> <p>a) Distributividad b) Cerradura c) Conmutatividad d) Asociatividad</p> <p>3.4.6</p> <p>a) Negativo b) No se puede determinar el signo c) Positivo d) Negativo</p>	<p>3.4.7</p> <p>a) > b) < c) > d) =</p> <p>3.4.8</p> <p>a) $f(x)$ b) $1/m$ c) $f^{-1}(x)$ d) $m - ni$</p> <p>3.4.9</p> <p>a) Indeterminado b) 0 c) Indeterminado d) 1 e) 0 f) Indeterminado</p>
Sección 4: Aritmética		
<p>4.5.1</p> <p>a) 97 b) -42 c) 27 d) 80 e) 0 f) indeterminado g) 59/12</p>	<p>h) 67/105 i) 11/2 j) -7/26 k) 5/6 l) 1/9 m) 34</p>	<p>n) 81/8 o) 59043 p) 3 q) 17/6 r) 3^{15} s) $21^2 = 441$ t) 72 u) $11\sqrt[3]{7}$</p>
Sección 5: Álgebra		
<p>5.4.1</p> <p>a) $10x^4 - 25x^3 + 3x^2 + 13x + 7$ b) $-4m^4 + 19m^3n + 11mn^2 - n^3$ c) $2x^3 - \frac{19}{3}x^2 + \frac{77}{3}x - 98$ d) $x^2 - x - 1$</p> <p>5.4.2</p> <p>a) $x^2 - 12x + 36$ b) $2197a^3 + 1521a^2b^4 + 351ab^8 + 27b^{12}$</p>	<p>c) $p^2 - 3p + 10$ d) $64w^2 - \frac{4}{25}z^2$</p> <p>5.4.3</p> <p>a) $5x^2(5x^5 - 2x^3 + 3x - 1)$ b) $(4am - 1)(m^2 - 3n)$ c) $(m^2 + 6)^2$ d) $(16w^3 + 13z^5)(16w^3 - 13z^5)$ e) $(a - 3)(a - 5)$ f) $(3x + 2)(4x - 3)$ $3(x-1)$</p>	<p>5.4.4</p> <p>a) $x = -\frac{1}{4}$ b) $x = -\frac{20}{11}$ c) $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{3}{4}$ d) $x = -5, x = 13$</p> <p>5.4.5</p> <p>a) $x \in (3, \infty)$ b) $x \in (6, 8)$</p> <p>5.4.6</p> <p>a) $x = -4, y = 5$ b) $x = 1, y = 1$</p>



Sección 6: Trigonometría

<p>6.4.1</p> <p>a) $\frac{37\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.6458 \text{ rad}$</p> <p>b) $\approx 1.4154 \text{ rad}$</p> <p>6.4.2</p> <p>a) 105°</p> <p>b) 150°</p>	<p>6.4.3</p> <p>a) $a \approx 19.3733 \text{ m}$ $b \approx 12.5812 \text{ m}$ $\beta = 33^\circ$</p> <p>b) $b \approx 24.5927 \text{ ft}$ $\alpha \approx 30^\circ 41' 47.19''$ $\beta \approx 59^\circ 18' 12.81''$</p> <p>6.4.4</p> <p>a) $5/3$</p> <p>b) $12/5$</p>	<p>c) $5/12$</p> <p>d) $3/5$</p> <p>e) $\frac{3}{4}$</p> <p>f) $\sqrt{2}$</p> <p>g) $\sqrt{2}$</p> <p>h) $\sqrt{3}/3$</p> <p>6.4.4</p> <p>Altura máxima $\approx 2.9\text{m}$</p>
---	---	---

Sección 7: Funciones

<p>7.5.1</p> <p>a) $x \in (-\infty, \infty)$</p> <p>b) $f(x) \in (-\infty, \infty)$</p> <p>c)</p>  <p>d) Función lineal</p> <p>e)</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>-2</td> <td>13</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>-1</td> </tr> </tbody> </table>	x	f(x)	-2	13	0	9	4	-1	<p>7.5.2</p> <p>a) $x \in (-\infty, \infty)$</p> <p>b) $f(x) \in (-49, \infty)$</p> <p>c)</p>  <p>d) Función cuadrática</p> <p>e)</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>-9</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>-45</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table> <p>7.5.3</p> <p>a) Los datos sí corresponden a una función con comportamiento lineal.</p> <p>b) Los datos no corresponden a una función.</p>	x	f(x)	-9	0	0	-45	5	0	<p>7.5.4</p> <p>a) Dominio: $x \in (-\infty, \infty)$</p> <p>$f(0) = -3$</p> <p>$f(4) = 25$</p> <p>$f(m+1) = 7m+4$</p> <p>$f(-x^3) = -7x^3 - 3$</p> <p>b) Dominio: $x \in (-\infty, \infty)$</p> <p>$f(-1) = 1$</p> <p>$f(10) \approx 0.1895$</p> <p>$f\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{2p+32}{p^2-2p+5}$</p> <p>$f(x^2) = \frac{x^2+8}{x^4-x^2+5}$</p> <p>c) Dominio: $x \in (-\infty, \infty)$</p> <p>$f(-1) = -2$</p> <p>$f(0) = -1$</p> <p>$f(1) = 0$</p> <p>$f(2) = 2$</p>
x	f(x)																	
-2	13																	
0	9																	
4	-1																	
x	f(x)																	
-9	0																	
0	-45																	
5	0																	

Sección 8: Logaritmos

<p>8.5.1</p> <p>a) $x = \frac{1}{3} \ln 14$</p> <p>b) $x = 2 \log_7 2.9$</p>	<p>8.5.2</p> <p>a) $x = 10^{1.3} - 5$</p> <p>b) $x = \pm \sqrt{e^{5.92}}$</p>	<p>8.5.3</p> <p>a) $x = \pm \sqrt{\log_3 7}$</p> <p>b) $x = 8$</p> <p>c) $x = \sqrt{\frac{404}{99}}$</p>
---	--	--

10. ¡Quiero saber más!

Sección 3: Lenguaje Matemático

Clasificación de los números reales y sus propiedades: <https://ecuacionde.com/numeros-reales/>

Recíproco: <https://www.disfrutalasmaticas.com/numeros/reciproco.html>

Ecuaciones polinómicas: <https://www.lifeder.com/ecuaciones-polinomicas/>

Números reales: <https://www.liveworksheets.com/w/es/maticas/326353>

Múltiplos y divisores: <https://es.khanacademy.org/math/6-grado-innova-schools/x4950ce693411a6d9:nocion-y-uso-de-los-numeros>

Operaciones con cero e infinito: <http://unaayudamatematicasucre.blogspot.com/2016/08/operaciones-con-cero-e-infinito.html>

Sección 4: Aritmética

<https://es.khanacademy.org/kmap/operations-and-algebraic-thinking-g/oat220-arithmetic-operations>

<https://www.superprof.es/apuntes/escolar/maticas/aritmetica/>

https://www.tutorela.es/maticas/el_orden_de_las_operaciones

Sección 5: Álgebra

<https://blogs.ugto.mx/rea/clase-digital-4-operaciones-algebraicas-basicas-suma-resta-multiplicacion-y-division/>

http://cidecame.uaeh.edu.mx/lcc/mapa/PROYECTO/libro1/15_operaciones_algebraicas.html

https://recursos.salonesvirtuales.com/assets/bloques/productos-notables-factorizacion_tchefionsecalfaro.pdf

https://www.maticasonline.es/almacen/2eso/fichas%20eso_sant/pdf_6-Ecuaciones1y2grado.pdf

<https://www.ck12.org/book/ck-12-conceptos-de-%c3%81lgebra-i-nivel-superior-en-espa%c3%b1ol/section/5.1/>

Sección 6: Trigonometría

<https://miprofe.com/trigonometria-conceptos-basicos/>

<https://concepto.de/trigonometria/>

<https://www.studysmarter.es/resumenes/maticas/geometria/trigonometria/>

<http://www.unl.edu.ar/ingreso/cursos/maticas/eje4/>

Sección 7: Funciones

<https://datascientest.com/es/comprender-funciones-matematicas>

<https://www.funciones.xyz/>

<https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/funciones/funciones.html>

Sección 8: Logaritmos

<https://es.khanacademy.org/math/algebra2/x2ec2f6f830c9fb89:logs/x2ec2f6f830c9fb89:log-intro/a/intro-to-logarithms>

[¿Para qué sirven LOS LOGARITMOS? ¿Por qué nos los explican en la escuela!?](https://www.portaleducativo.net/segundo-medio/35/logaritmos-propiedades)

<https://www.portaleducativo.net/segundo-medio/35/logaritmos-propiedades>